Der Einfluss der Feuchte auf die Brunt-Väisälä Frequenz

$$N_m^{\,2} = \frac{-g}{T_0} \cdot \left(\frac{dT_u}{dz} + \Gamma_m \right) \cdot \left(1 + \frac{l_v \cdot q_{s0}}{R_d \cdot T_0} \right) + \frac{g}{1 + q_{w0}} \cdot \frac{dq_{wu}}{dz}$$

André Summer
0416941

Inhalt des Vortrags

1. Motivation und Grundsätzliches

- Unter welchen Bedingungen ist die Atmosphäre tatsächlich stabil geschichtet?

- Warum weicht die Brunt-Väisälä Frequenz (BVF) in feuchter Atmosphäre von der BVF in trockener Umgebung ab?

- feuchte BVF wird sehr häufig für verschiedenste Berechnungen verwendet

$$m(k,l) = \left[\left(\frac{N_m^{\,2} - \sigma^2}{\sigma} \right) \cdot \left(k^2 + l^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Nomenklatur

Bei Variablen bei denen Verwechslungsgefahr besteht sind alle Variablen ...
... der **u**mgebenden Atmosphäre mit einem **u** indiziert.
... die sich auf das bewegte **P**artikel beziehen mit einem **p** indiziert

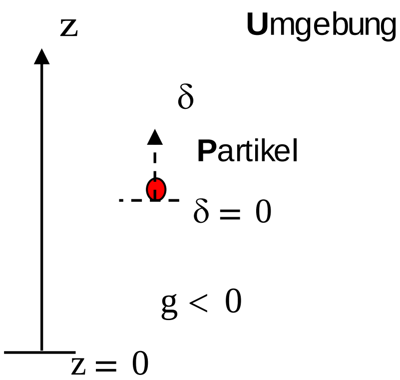
Generell wird davon ausgegangen, dass alle Variablen von der Auslenkung abhängig sind (außer g).
Variablen die sich nur auf das Niveau $\delta = 0$ beziehen erhalten als Index eine angehängte Null
d.h. $T_{u0} := T_u(\delta = 0)$; $p_{p0} := p_p(\delta = 0)$ usw.

Randbedingungen:

Im folgenden wird immer davon ausgegangen, dass $p_u = p_p \Rightarrow := p$

Weiters wird davon ausgegangen, dass die Temperatur des ausgelenkten Luftpakets bei der Auslenkung $\delta = 0$, gleich der Temperatur der Umgebung ist,
d.h. $T_{p0} = T_{u0} \Rightarrow := T_0$

2. Herleitung der BVF für die trockene Atmosphäre



3. Bewegungsgl.:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{-1}{\rho_p} \cdot \frac{dp}{dz} + g \qquad (0.1)$$

hydrost. Gleichgewicht:

$$\frac{dp}{dz} = g \cdot \rho_u \qquad (0.2)$$

Einsetzen von (0.2) in (0.1) mit $p = p_u$ ergibt: $$\frac{dw}{dt} = g \cdot \frac{\rho_p - \rho_u}{\rho_p} = \frac{d^2\delta}{dt^2} \qquad (7)$$

$$\rho_u = \frac{p}{R_d \cdot T_u} \qquad\qquad \rho_p = \frac{p}{R_d \cdot T_p}$$

Einsetzen dieser 2 Gleichungen führt zu:

$$\frac{dw}{dt} = g \cdot \left(1 - \frac{T_p}{T_u}\right) \qquad (0.3)$$

$$\frac{dw}{dt} = g \cdot \left(1 - \frac{T_p}{T_u}\right) \qquad (0.3)$$

$$\theta_p = T_p \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\kappa} \qquad \theta_u = T_u \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\kappa}$$

Einsetzen in (0.3) ergibt:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = g \cdot \left(1 - \frac{\theta_p}{\theta_u}\right)$$

In einer beliebig geschichteten Atmosphäre ist jedoch θ_u von der Auslenkung abhängig.

Um eine Formel für diese Abhängingkeit als Funktion für kleine Auslenkungen δ zu erhalten, kann man folgenden Ansatz machen (Taylorreihe mit Abbruch nach dem linearen Term):

$$\frac{1}{\theta_u} = \frac{1}{\theta_{u0}} - \frac{1}{{\theta_{u0}}^2} \left(\frac{d\theta_u}{dz}\right)_{\delta = 0} \cdot \delta + \dots$$

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = g \cdot \left(1 - \frac{\theta_p}{\theta_u}\right) \qquad \frac{1}{\theta_u} = \frac{1}{\theta_{u0}} - \frac{1}{{\theta_{u0}}^2}\left(\frac{d\theta_u}{dz}\right)_{\delta = 0} \cdot \delta + \ldots$$

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = g \cdot \left[1 - \frac{\theta_p}{\theta_p} + \left(\frac{\theta_p}{{\theta_u}^2}\frac{d\theta_u}{dz}\right)_{\delta = 0} \cdot \delta\right]$$

Da $\theta_{u\,(\delta = 0)} = \theta_p$ folgt:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = g \cdot \frac{1}{\theta_{u0}}\left(\frac{d\theta_u}{dz}\right)_{\delta = 0} \cdot \delta$$

Schwinungsgleichung:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = -{N_m}^2 \cdot \delta = \frac{dw}{dt}$$

Herleitung.:

$$\delta(t) = \sin(N \cdot t) \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta(t) = -N^2 \cdot \delta(t)$$

Daraus folgt:

$$N^2 = -g\left(\frac{1}{\theta_u}\frac{d\theta_u}{dz}\right)_{\delta = 0} \qquad (1b)$$

$$N^2 = -g\left(\frac{1}{\theta_u}\,\frac{d\theta_u}{dz}\right)_{\delta=0} \qquad (1b)$$

$$\delta(t) = e^{-iNt}$$

für:

$$\frac{d\theta_u}{dz} < 0 \qquad \delta(t) = e^{\sqrt{\left|-g\left(\frac{1}{\theta_{u0}}\cdot\frac{d\theta_u}{dz}\right)\right|}}$$

$$\frac{d\theta_u}{dz} = 0 \qquad \text{neutral}$$

$$\frac{d\theta_u}{dz} > 0 \qquad \text{stabil}$$

Standardwerte: $N = 0.01\,s^{-1}$ $\quad T := \frac{2\cdot\pi}{N}$ $\quad \approx 10$ Minuten

3. Herleitung der exakten Form der BVF (Lalas und Einaudi, 1974)

- Annahmen:
  - **nur gesättigter** adiabatischer Feuchtefluß
  - Flüssigwasserkonzentration in Umgebung niedrig, d.h. zu kleine Tropfen um auszufallen
  - Timescale der Abgabe bzw. Aufnahme der Enthalpiedifferenz zwischen gasförmiger u. flüssiger Phase (latente Wärme) und Kondensations bzw. Verdunstungsprozesse wesentlich kleiner

    als

    Timescale der auf/abwärts-Bewegung

=> Annahmen für Bewegungen mit kleiner Amplitude und geringem Ausmaß an Kondensation geeignet.

Gesamtbeschleunigung:

$$\frac{dw}{dt} = g \cdot \frac{\rho_p - \rho_u}{\rho_u} \qquad (7)$$

$$\rho_p = \rho_{p0} + \left(\frac{d\rho_p}{dz}\right)_{\delta=0} \cdot \delta + \ldots \qquad \rho_u = \rho_{u0} + \left(\frac{d\rho_u}{dz}\right)_{\delta=0} \cdot \delta + \ldots$$

$$\frac{dw}{dt} = g \cdot \frac{\rho_{p0} - \rho_{u0} + \left(\frac{d\rho_p}{dz}\right)_{\delta=0} \cdot \delta - \left(\frac{d\rho_u}{dz}\right)_{\delta=0} \cdot \delta}{\rho_{u0} + \left(\frac{d\rho_u}{dz}\right)_{\delta=0} \cdot \delta}$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich im Zähler dadurch dass: $\rho_{p0} - \rho_{u0} = 0$

und im Nenner aufgrund: $\left(\frac{d\rho_u}{dz}\right)_{\delta=0} \cdot \delta \ll \rho_{u0}$

$$\frac{dw}{dt} = g \cdot \delta \cdot \left[\frac{1}{\rho_{u0}} \cdot \left(\frac{d\rho_p}{dz}\right)_{\delta=0} - \frac{1}{\rho_{u0}} \cdot \left(\frac{d\rho_u}{dz}\right)_{\delta=0}\right] = \left(\frac{d\ln(\rho_p)}{dz} - \frac{d\ln(\rho_u)}{dz}\right)_{\delta=0} \cdot g \cdot \delta$$

Herleitung der exakten Form der BVF (Lalas und Einaudi)

$$\frac{dw}{dt} = g \cdot \delta \cdot \left[\frac{1}{\rho_{u0}} \cdot \left(\frac{d\rho_p}{dz} \right)_{\delta = 0} - \frac{1}{\rho_{u0}} \cdot \left(\frac{d\rho_u}{dz} \right)_{\delta = 0} \right] = \left(\frac{d\ln(\rho_p)}{dz} - \frac{d\ln(\rho_u)}{dz} \right)_{\delta = 0} \cdot g \cdot \delta$$

Schwinungsgleichung: $$\frac{d^2\delta}{dt^2} = -N_m{}^2 \cdot \delta = \frac{dw}{dt}$$

Daraus folgt: $$N_m{}^2 = -g \left[\frac{d}{dz} \cdot \left(d\ln(\rho_p) - d\ln(\rho_u) \right) \right]_{\delta = 0} \qquad (8)$$

oder anders geschrieben: $$N_m{}^2 = -g \cdot \left(\frac{d}{dz} \ln(\rho_x) \right)_{\delta = 0} \Bigg|_{x=u}^{x=p}$$

- Dichte ist jedoch nicht direkt messbar

Herleitung der exakten Form der BVF (Lalas und Einaudi)

Nebenrechnung: Herleitung der Beziehung

$$p = \rho \cdot R_d \cdot T \cdot \frac{1 + q_v \cdot \varepsilon^{-1}}{1 + q_w} \qquad (9)$$

Zustandsgleichung für feuchte Luft

$$p = p_d + e = \rho_d \cdot R_d \cdot T + \rho_v \cdot R_v \cdot T = \rho_d \cdot R_d \cdot T + \rho_v \cdot \frac{R_v}{R_d} \cdot R_d \cdot T$$

$$p = R_d \cdot T \cdot \left(\rho_d + \frac{\rho_v}{\varepsilon}\right) \qquad \varepsilon := \frac{R_d}{R_v}$$

Nach Multiplikation mit ρ/ρ, wobei für ρ im Nenner der äquivalente Ausdruck $\rho = \rho_d + \rho_v + \rho_L$ verwendet wird:

$$p = \rho \cdot R_d \cdot T \cdot \frac{\rho_d + \rho_v \cdot \varepsilon^{-1}}{\rho_d + \rho_v + \rho_L}$$

Herleitung der exakten Form der BVF (Lalas und Einaudi)

$$p = \rho \cdot R_d \cdot T \cdot \frac{\rho_d + \rho_v \cdot \varepsilon^{-1}}{\rho_d + \rho_v + \rho_L}$$

Mit $\rho_w = \rho_v + \rho_L$ und nach Erweitern mit $\dfrac{\rho_d^{-1}}{\rho_d^{-1}}$ ergibt sich:

$$p = \rho \cdot R_d \cdot T \frac{1 + \dfrac{\rho_v}{\rho_d} \cdot \dfrac{1}{\varepsilon}}{1 + \dfrac{\rho_w}{\rho_d}} = \rho \cdot R_d \cdot T \cdot \frac{1 + q_v \cdot \varepsilon^{-1}}{1 + q_w}$$

durch Umformen und für $q_v := q_s$

$$\rho = \frac{p}{R_d \cdot T} \cdot \frac{1 + q_s}{1 + q_s \cdot \varepsilon^{-1}}$$

$$\ln(\rho) = \ln(p) - \ln(R_d) - \ln(T) + \ln(1 + q_w) - \ln\left(1 + q_s \cdot \varepsilon^{-1}\right)$$

$$\ln(\rho) = \ln(p) - \ln\left(R_d\right) - \ln(T) + \ln\left(1 + q_w\right) - \ln\left(1 + q_s \cdot \varepsilon^{-1}\right)$$

$$N_m^{\ 2} = -g\left[\frac{d}{dz} \cdot \left(d\ln\left(\rho_p\right) - d\ln\left(\rho_u\right)\right)\right]_{\delta = 0} \qquad (8)$$

Einsetzen in (8) ergibt:

$$N_m^{\ 2} = -g \cdot \frac{d}{dz} \cdot \left(\ln\left(p_x\right) - \ln\left(R_d\right) - \ln\left(T_x\right) + \ln\left(1 + q_{wx}\right) - \ln\left(1 + q_{sx} \cdot \varepsilon^{-1}\right)\right) \Bigg|_{x=u}^{x=p}$$

$$N_m^{\ 2} = -g \cdot \frac{d}{dz} \cdot \left(-\ln\left(T_{x.}\right) + \ln\left(1 + q_{wx}\right) - \ln\left(1 + q_{sx} \cdot \varepsilon^{-1}\right)\right) \Bigg|_{x=u}^{x=p}$$

$$N_m^{\ 2} = -g \cdot \left(\frac{-1}{T_0} \cdot \frac{dT_x}{dz} + \frac{1}{1 + q_{w0}} \cdot \frac{d\left(1 + q_{wx}\right)}{dz} - \frac{1}{1 + q_{s0} \cdot \varepsilon^{-1}} \cdot \frac{d\left(1 + q_{sx} \cdot \varepsilon^{-1}\right)}{dz}\right) \Bigg|_{x=u}^{x=p}$$

$$N_m^{\ 2} = g \cdot \left(\frac{1}{T_0} \cdot \frac{dT_x}{dz} + \frac{1}{\varepsilon + q_{s0}} \cdot \frac{dq_{sx}}{dz} - \frac{1}{1 + q_{w0}} \cdot \frac{dq_{wx}}{dz}\right) \Bigg|_{x=u}^{x=p} \qquad (10)$$

NR: Wenn man unmittelbare Anpassung an die Umgebungsfeuchte annimmt, dann kann q_s über die Clausius-Clapeyron Gl. berechnet werden.

$$\frac{1}{e_s} \cdot \frac{de_s}{dT} = \frac{\varepsilon \cdot l_v}{R_d \cdot T^2} \qquad (11)$$

Die Definition des Mischungsverhältnisses $q_s := \frac{\rho_s}{\rho_d}$ lässt sich folgendermaßen umformen:

$$q_s = \frac{\rho_s}{\rho_d} = \frac{e_s}{R_v \cdot T} \cdot \frac{R_d \cdot T}{p_d} = \frac{\varepsilon \cdot e_s}{p_d} = \frac{\varepsilon \cdot e_s}{p - e_s} \qquad (11.1)$$

$$\frac{dq_s}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{\varepsilon \cdot e_s}{p - e_s}\right) = \frac{\varepsilon}{p - e_s} \cdot \frac{de_s}{dz} - \frac{\varepsilon \cdot e_s}{(p - e_s)^2} \cdot \left(\frac{dp}{dz} - \frac{de_s}{dz}\right)$$

Mithilfe der Clausius-Clapeyron Gl.:

$$\ldots = \frac{\varepsilon}{p - e_s} \cdot \frac{e_s \cdot \varepsilon \cdot l_v}{R_d \cdot T^2} \cdot \frac{dT}{dz} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{q_s}{p - e_s} \cdot \frac{e_s \cdot \varepsilon \cdot l_v}{R_d \cdot T^2} \cdot \frac{dT}{dz} - \frac{q_s}{p - e_s} \cdot \frac{dp}{dz}$$

Herleitung der exakten Form der BVF (Lalas und Einaudi)

$$\frac{dq_s}{dz} = \frac{\varepsilon}{p - e_s} \cdot \frac{e_s \cdot \varepsilon \cdot l_v}{R_d \cdot T^2} \cdot \frac{dT}{dz} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{q_s}{p - e_s} \cdot \frac{e_s \cdot \varepsilon \cdot l_v}{R_d \cdot T^2} \cdot \frac{dT}{dz} - \frac{q_s}{p - e_s} \cdot \frac{dp}{dz} \qquad q_s = \frac{\varepsilon \cdot e_s}{p - e_s} \qquad (11.1)$$

Unter Berücksichtigung von (11.1) und durch Herausheben von $\left(1 + \frac{q_s}{\varepsilon}\right)$ ergibt sich:

$$\frac{dq_s}{dz} = \left(1 + \frac{q_s}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{\varepsilon \cdot l_v \cdot q_s}{R_d \cdot T^2} \cdot \frac{dT}{dz} - \frac{q_s}{p - e_s} \cdot \frac{dp}{dz} \qquad (11.2)$$

Wobei sich der Term $\frac{q_s}{p - e_s}$ umformen lässt zu:

$$\frac{q_s}{p - e_s} = \left(1 + \frac{q_s}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{q_s}{p}$$

Herleitung der exakten Form der BVF (Lalas und Einaudi)

$$\frac{dq_s}{dz} = \left(1 + \frac{q_s}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{\varepsilon \cdot l_v \cdot q_s}{R_d \cdot T^2} \cdot \frac{dT}{dz} - \frac{q_s}{p - e_s} \cdot \frac{dp}{dz} \qquad (11.2)$$

$$\frac{q_s}{p - e_s} = \left(1 + \frac{q_s}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{q_s}{p}$$

Einsetzen in (11.2) und Herausheben von $\left(1 + \frac{q_s}{\varepsilon}\right)$ ergibt:

$$\frac{dq_s}{dz} = \left(1 + \frac{q_s}{\varepsilon}\right) \cdot \left(\frac{\varepsilon \cdot l_v \cdot q_s}{R_d \cdot T^2} \cdot \frac{dT}{dz} - \frac{q_s}{p} \cdot \frac{dp}{dz}\right) \qquad (12)$$

zur Erinnerg (10):

$$N_m^{\ 2} = g \cdot \left(\frac{1}{T_0} \cdot \frac{dT_x}{dz} + \frac{1}{\varepsilon + q_{s0}} \cdot \frac{dq_{sx}}{dz} - \frac{1}{1 + q_{w0}} \cdot \frac{dq_{wx}}{dz}\right) \Bigg|_{x=u}^{x=p}$$

(10) mit (12):

$$N_m^{\ 2} = g \cdot \left[\frac{1}{T_0} \cdot \frac{dT_x}{dz} + \frac{1}{\varepsilon + q_{s0}} \cdot \left(1 + \frac{q_{s0}}{\varepsilon}\right) \cdot \left(\frac{\varepsilon \cdot l_v \cdot q_{s0}}{R_d \cdot T_0^{\ 2}} \cdot \frac{dT_x}{dz} - \frac{q_{s0}}{p} \cdot \frac{dp}{dz}\right) - \frac{1}{1 + q_{w0}} \cdot \frac{dq_{wx}}{dz}\right] \Bigg|_{x=u}^{x=p}$$

Herleitung der exakten Form der BVF (Lalas und Einaudi)

$$N_m^{\ 2} = g \cdot \left[\frac{1}{T_0} \cdot \frac{dT_x}{dz} + \frac{1}{\varepsilon + q_{s0}} \cdot \left(1 + \frac{q_{s0}}{\varepsilon}\right) \cdot \left(\frac{\varepsilon \cdot l_v \cdot q_{s0}}{R_d \cdot T_0^{\ 2}} \cdot \frac{dT_x}{dz} - \frac{q_{s0}}{p} \cdot \frac{dp}{dz} \right) - \frac{1}{1 + q_{w0}} \cdot \frac{dq_{wx}}{dz} \right] \Bigg|_{x=u}^{x=p}$$

$$\text{NR:} \qquad \frac{1}{\varepsilon + q_{s0}} \cdot \left(1 + \frac{q_{s0}}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon + q_{s0}} \cdot \frac{\varepsilon + q_{s0}}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$N_m^{\ 2} = g \cdot \left[\frac{1}{T_0} \cdot \frac{dT_x}{dz} \cdot \left(1 + \frac{l_v \cdot q_{s0}}{R_d \cdot T_0}\right) - \frac{q_{s0}}{\varepsilon \cdot p} \cdot \frac{dp}{dz} - \frac{1}{1 + q_{w0}} \cdot \frac{dq_{wx}}{dz} \right] \Bigg|_{x=u}^{x=p}$$

Mit $\frac{dT_p}{dz} = -\Gamma_m$ und $\frac{dq_{wp}}{dz} = 0$ folgt:

$$N_m^{\ 2} = g \cdot \left[\frac{1}{T_0} \cdot (-\Gamma_m) \cdot \left(1 + \frac{l_v \cdot q_{s0}}{R_d \cdot T_0}\right) - \frac{q_{s0}}{\varepsilon \cdot p} \cdot \frac{dp}{dz} \right] \ldots$$

$$\ldots - g \cdot \left[\frac{1}{T_0} \cdot \frac{dT_u}{dz} \cdot \left(1 + \frac{l_v \cdot q_{s0}}{R_d \cdot T_0}\right) - \frac{q_{s0}}{\varepsilon \cdot p} \cdot \frac{dp}{dz} - \frac{1}{1 + q_{w0}} \cdot \frac{dq_{wu}}{dz} \right]$$

$$N_m^{\ 2} = \frac{-g}{T_0} \cdot \left(\frac{dT_u}{dz} + \Gamma_m \right) \cdot \left(1 + \frac{l_v \cdot q_{s0}}{R_d \cdot T_0}\right) + \frac{g}{1 + q_{w0}} \cdot \frac{dq_{wu}}{dz} \qquad (13) = (5)$$

4. Feuchte Brunt-Väisälä Frequenz als Funktion konservativer Variablen

In ungesättigter Luft kann die Brunt Väisälä Frequenz N durch folgende gleichwertige Gleichungen berechnet werden:

$$N^2 = \frac{-g}{T_{u0}} \cdot \left(\frac{dT_u}{dz} + \Gamma_d \right) \quad (1a) \qquad \text{oder} \qquad N^2 = -g \cdot \frac{d\ln\theta_u}{dz} \quad (1b)$$

bereits hergeleitet:

$$N_m{}^2 = \frac{-g}{T_0} \cdot \left(\frac{dT_u}{dz} + \Gamma_m \right) \cdot \left(1 + \frac{l_v \cdot q_{s0}}{R_d \cdot T_0} \right) + \frac{g}{1 + q_{w0}} \cdot \frac{dq_{wu}}{dz} \quad (13)$$

$$N_m{}^2 = \frac{-g}{1 + q_w} \cdot \left(\frac{\Gamma_m}{\Gamma_d} \cdot \frac{d\ln(\theta_q)}{dz} - \frac{dq_w}{dz} \right) \quad (21)$$

Für die Herleitung benötigen wir als Basis zunächst die klassische Gleichung für eine reversible Sättigungsadiabate:

$$S = M_s \cdot s_s + M_d \cdot s_d + M_L \cdot s_L$$

$$\frac{dS}{dz} = M_s \cdot \frac{ds_s}{dz} + s_s \cdot \frac{dM_s}{dz} + M_d \cdot \frac{ds_d}{dz} + s_d \cdot \frac{dM_d}{dz} + M_L \cdot \frac{ds_L}{dz} + s_L \cdot \frac{dM_L}{dz}$$

mit: $\frac{dM_d}{dz} = 0$ und $\frac{dM_L}{dz} = \frac{-dM_v}{dz}$

folgt: $$\frac{dS}{dz} = \frac{dM_s}{dz} \cdot \left(s_s - s_L\right) + M_s \cdot \frac{ds_s}{dz} + M_L \cdot \frac{ds_L}{dz} + M_d \cdot \frac{ds_d}{dz}$$

Nm mit konservativen Variablen

$$\frac{dS}{dz} = \frac{dM_s}{dz} \cdot (s_s - s_L) + M_s \cdot \frac{ds_s}{dz} + M_L \cdot \frac{ds_L}{dz} + M_d \cdot \frac{ds_d}{dz}$$

Mithilfe der Entropieform der Clausius-Clapeyron'schen Gl. $l_v = T \cdot (s_s - s_L)$ und Multiplikation der gesamten Gl. mit M_d^{-1} ergibt sich:

$$\frac{dS}{dz} = \frac{1}{M_d} \cdot \frac{dM_s}{dz} \cdot \frac{l_v}{T} + q_s \cdot \frac{ds_s}{dz} + q_L \cdot \frac{ds_L}{dz} + \frac{ds_d}{dz}$$

NR: $q_s = \frac{M_s}{M_d}$ $\qquad \frac{dq_s}{dz} = \frac{1}{M_d} \cdot \frac{dM_s}{dz}$ $\qquad$ da $\frac{dM_d}{dz} = 0$

Für die feuchtadiabatisch, reversible Auslenkung gilt: $\frac{dS}{dz} = 0$

nach (6.79, Bohren u. Albrecht, 1998) gilt weiters: $ds_d = c_p \cdot d\ln(\theta_d)$

$$0 = \frac{dq_s}{dz} \cdot \frac{l_v}{T} + q_s \cdot \frac{ds_s}{dz} + q_L \cdot \frac{ds_L}{dz} + c_p \frac{d\ln(\theta_d)}{dz}$$

NR: Aus dem 1.HS und dem 2. HS kann man ganz allgemein ds folgendermaßen ermitteln:

$$\frac{dq}{dt} = c_p \cdot \frac{dT}{dt} - \alpha \cdot \frac{dp}{dt} \qquad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{T}\frac{dq}{dt}$$

$$ds = c_p \cdot dln(T) - R_i \cdot dln(p)$$

Daraus folgt für die Entropiegradienten:

$$\frac{ds_s}{dz} = c_{pv} \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{dT}{dz} - R_v \cdot \frac{1}{e_s} \cdot \frac{de_s}{dz} = c_{pv} \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{dT}{dz} - R_v \cdot \frac{1}{e_s} \cdot \frac{de_s}{dT} \cdot \frac{dT}{dz}$$

Mithilfe der Clausius-Clapeyron Gl. $\frac{1}{e_s} \cdot \frac{de_s}{dT} = \frac{\varepsilon \cdot l_v}{R_d \cdot T^2}$ und $\frac{R_v \cdot \varepsilon}{R_d} = 1$ folgt:

$$\frac{ds_s}{dz} = \frac{ds_v}{dz} = \left(c_{pv} - \frac{l_v}{T}\right) \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{dT}{dz}$$

Aus dem 2.HS folgt: $\frac{ds_L}{dz} = \frac{c_L}{T} \cdot \frac{dT}{dz}$

$$0 = \frac{dq_s}{dz} \cdot \frac{l_v}{T} + q_s \cdot \frac{ds_s}{dz} + q_L \cdot \frac{ds_L}{dz} + c_p \frac{d\ln(\theta_d)}{dz}$$

$$\frac{ds_s}{dz} = \frac{ds_v}{dz} = \left(c_{pv} - \frac{l_v}{T}\right) \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{dT}{dz}$$

$$\frac{ds_L}{dz} = \frac{c_L}{T} \cdot \frac{dT}{dz}$$

$$c_p \cdot \frac{d\ln(\theta_d)}{dz} + \frac{l_v}{T} \cdot \frac{dq_s}{dz} + q_s \cdot \left(c_{pv} - \frac{l_v}{T}\right) \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{dT}{dz} + q_L \cdot \frac{c_L}{T} \cdot \frac{dT}{dz} = 0$$

$$c_p \cdot \frac{d\ln(\theta_d)}{dz} + \frac{l_v}{T} \cdot \frac{dq_s}{dz} + \left(c_{pv} \cdot q_s - \frac{l_v \cdot q_s}{T} + c_L \cdot q_L\right) \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{dT}{dz} = 0 \qquad (14)$$

.... klassische Ausgangsform für eine reversible Sättigungsadiabate

Nun kann die feuchtadiabatische Temperaturabnahme $\Gamma_m = \frac{-dT}{dz}$ aus (14) bestimmt werden:

$$\frac{d\ln(\theta_d)}{dz} + \frac{l_v}{c_p \cdot T} \cdot \frac{dq_s}{dz} - \left(\frac{c_{pv} \cdot q_s + c_L \cdot q_L}{c_p} - \frac{l_v \cdot q_s}{c_p \cdot T}\right) \cdot \frac{\Gamma_m}{T} = 0$$

und man gelangt unter Berücksichtigung von (12) und einem hydrostatischen Ansatz für den Druckgradienten zu:

$$\Gamma_m = \Gamma_d \cdot (1 + q_w) \cdot \left(1 + \frac{l_v \cdot q_s}{R_d \cdot T}\right) \cdot \left[1 + \frac{c_{pv} \cdot q_s + c_w \cdot q_L}{c_p} + \frac{\varepsilon \cdot l_v^{\,2} \cdot q_s}{c_p \cdot R_d \cdot T^2} \cdot \left(1 + \frac{q_s}{\varepsilon}\right)\right]^{-1} \qquad (19)$$

$$\Gamma_m = \Gamma_d \cdot (1 + q_w) \cdot \left(1 + \frac{l_v \cdot q_s}{R_d \cdot T}\right) \cdot \left[1 + \frac{c_{pv} \cdot q_s + c_w \cdot q_L}{c_p} + \frac{\varepsilon \cdot l_v^{\,2} \cdot q_s}{c_p \cdot R_d \cdot T^2} \cdot \left(1 + \frac{q_s}{\varepsilon}\right)\right]^{-1} \qquad (19)$$

$$N_m^{\,2} = \frac{-g}{1 + q_w} \cdot \left(\frac{\Gamma_m}{\Gamma_d} \cdot \frac{d\ln(\theta_q)}{dz} - \frac{dq_w}{dz}\right) \qquad (21)$$

Aber: Im Artikel (Factors Governing Cellular Convection in Orographic Precipitation, Kirshba
und Durran, 2003, S. 687)

Behauptung (21) unterschlägtfälschlicherweise den folgenden Term !?

$$\frac{g}{l_v} + q_w \cdot \left(\frac{\Gamma_m}{\Gamma_d}\right) \cdot \frac{c_L}{c_p} \cdot \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) \cdot \frac{dq_w}{dz}$$

Durch Umformen von (21) erhält man:

$$N_m^{\,2} = -g \cdot \left[\frac{1 + \left(\frac{l_v \cdot q_s}{R_d \cdot T}\right)}{1 + \left(\frac{\varepsilon \cdot l_v^{\,2} \cdot q_s}{c_p \cdot R_d \cdot T^2}\right)} \cdot \left(\frac{d\ln(\theta)}{dz} + \frac{l_v}{c_p \cdot T} \cdot \frac{dq_s}{dz}\right) - \frac{dq_w}{dz}\right] \qquad (36)$$

Zusammenfassung:

- Auslenkung nach oben => Abkühlung, die bei Vorhandensein von Feuchte jedoch durch freiwerdende Differenzenthalpie (latente Wärme aufgrund Kondensation) teilweise kompensiert
- Verdunstung bewirkt durch „Verdunstungskälte“ einen analogen Effekt bei der Abwärtsbewegung

$\Rightarrow$ 1.) effektive Brunt Väisälä Frequenz ist niedriger, wenn Atmosphäre gesättigt

$\Rightarrow$ 2.) Möglich: Atmosphäre im trockenen Zustand stabil, im feuchten instabil

$\Rightarrow$ 3.) präzises Stabilitätskriterium ist wenn feuchte BVF einen reellen Wert hat

Übersicht der Lösungsansätze und anschließender Vergleich:

Wenn man θ in (1b) durch θ_e ersetzt erhält man:

$$N_m{}^2 = -g \cdot \frac{d\ln\theta_{eu}}{dz} \tag{2}$$

Zweiter Lösungsansatz basierend auf (1a) :

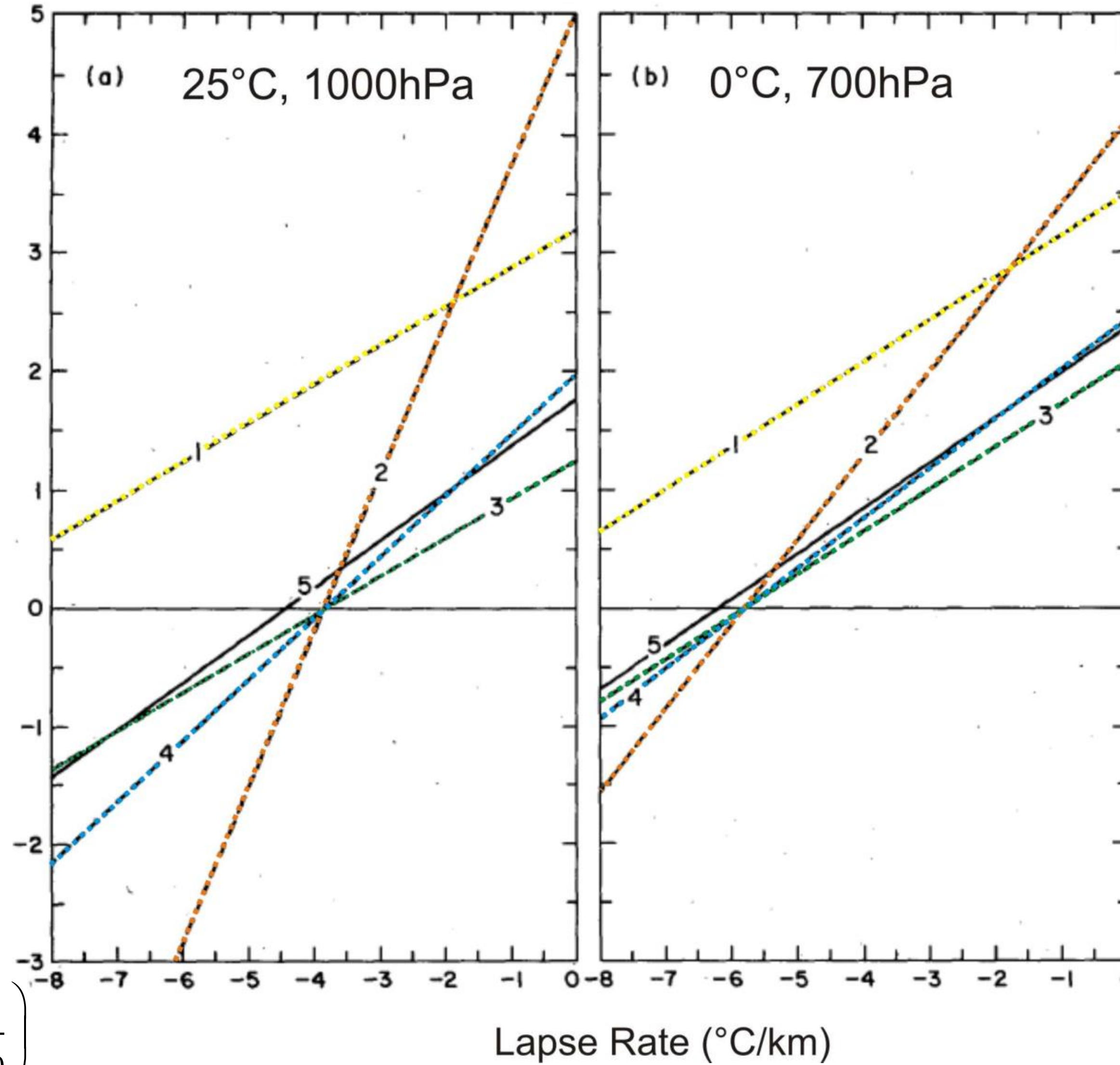
$$N_m{}^2 = \frac{-g}{T_{u0}}\left(\frac{dT_u}{dz} + \Gamma_m\right) \tag{3}$$

$$N_m{}^2 = \frac{-g}{T_{u0}} \cdot \left(\frac{dT_u}{dz} + \Gamma_m\right) \cdot \left(1 + \frac{l_v \cdot q_{s0}}{R_d \cdot T_{u0}}\right) \tag{4}$$

Tatsächliche korrekte Formulierung (Lalas und Einaudi, 1974):

$$N_m{}^2 = \frac{-g}{T_{u0}} \cdot \left(\frac{dT_u}{dz} + \Gamma_m\right) \cdot \left(1 + \frac{l_v \cdot q_{s0}}{R_d \cdot T_{u0}}\right) + \frac{g}{1 + q_{w0}} \cdot \frac{dq_w}{dz} \tag{5}$$

$N_m^{\,2}\ (10^4 \cdot s^{-2})$



$$(1)\ \dots\quad N^2 = -g\cdot\frac{d\ln(\theta_u)}{dz}$$

$$(2)\ \dots\quad N_m^{\,2} = -g\cdot\frac{d\ln(\theta_{eu})}{dz}$$

$$(3)\ \dots\quad N_m^{\,2} = \frac{-g}{T_{u0}}\cdot\left(\frac{dT_u}{dz} + \Gamma_m\right)$$

$$(4)\ \dots\quad N_m^{\,2} = \frac{-g}{T_{u0}}\cdot\left(\frac{dT_u}{dz} + \Gamma_m\right)\cdot\left(1 + \frac{l_v\cdot q_{s0}}{R_d\cdot T_{u0}}\right)$$

$$(5)\ \dots\quad N_m^{\,2} = \frac{-g}{T_{u0}}\cdot\left(\frac{dT_u}{dz} + \Gamma_m\right)\cdot\left(1 + \frac{l_v\cdot q_{s0}}{R_d\cdot T_{u0}}\right) + \frac{g}{1+q_{w0}}\cdot\frac{dq_w}{dz}$$

Referenzen

Hauptliteratur:

Durran, D.R., and J.B. Klemp, 1982: On the effects of moisture on the Brunt-Väisälä Frequency. *J. Atmos. Sci.,* **39**

Zusatzliteratur:

Durran, D. R., and J. B. Klemp, 1982: The effects of moisture on trapped mountain lee waves. *J. Atmos. Sci.,* **39**

Fraser et al. (1973): A theoretical study of the flow of air and fallout of solid precipitation over mountaineous terrain: Part 1. Air flow model. *J. Atmos. Sci.,* **30**, 801-812

Lalas, D.P., and F. Einaudi, 1973: On the stability of a moist atmosphere in the presence of a background wind. *J. Atmos. Sci.,* **30,** 795-800

Sonstige:

Dudis, J.J., 1972: The stability of a saturated, stably-stratified shear layer, *J. Atmos. Sci.,* **29**, 774-778

Buchtipp:

Bohren, C., and Albrecht, B., 1998: *Atmospheric Thermodynamics*, Oxford University Press, 402 pp.